

Corrigé — Centres Étrangers 2025 J2 – Exercice 1

Thème : Populations animales — Suites géométrique et récurrente — Algorithme Python

Barème indicatif : 6 points

On étudie l'évolution de deux populations animales à partir de l'année 2025 (rang $n = 0$).

- **Milieu A** : population u_n (en milliers), suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $0,93$.
- **Milieu B** : population v_n (en milliers), définie par $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ où :

$$f(x) = -0,05x^2 + 1,1x.$$

Partie A — Milieu A (suite géométrique)

Question 1. Valeur de u_1

$$u_1 = u_0 \times 0,93 = 6 \times 0,93 = \mathbf{5,58} \text{ milliers.}$$

Question 2. Expression explicite de u_n

La suite est géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $0,93$:

$$u_n = 6 \times (0,93)^n.$$

Question 3. Limite de (u_n)

Comme $|0,93| < 1$, on a $(0,93)^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

La population du milieu A **s'éteint à long terme**.

Partie B — Milieu B (suite récurrente)

Question 1. Valeur de v_1

$$v_1 = f(v_0) = f(6) = -0,05 \times 36 + 1,1 \times 6 = -1,8 + 6,6 = \mathbf{4,8} \text{ milliers.}$$

Question 2. Monotonie de f sur $[0; 11]$

La fonction $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$ est un polynôme du second degré. Sa dérivée est :

$$f'(x) = -0,1x + 1,1.$$

Sur $[0; 11]$: $f'(x) = 0 \iff x = 11$. Pour $x \in [0; 11[$, $f'(x) > 0$. Donc f est **croissante** sur $[0; 11]$.

Question 3. La suite (v_n) est décroissante et minorée par 2

On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n) : 2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.

Initialisation : $v_0 = 6, v_1 = 4,8$. On vérifie $2 \leq 4,8 \leq 6 \leq 6$ ✓.

Hérédité : Supposons $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.

— **Décroissance** : f est croissante sur $[0; 11] \supset [2; 6]$ et $v_{n+1} \leq v_n$, donc :

$$v_{n+2} = f(v_{n+1}) \leq f(v_n) = v_{n+1}. \quad \checkmark$$

— **Minoration** : $v_{n+1} \geq 2$ et f croissante, donc :

$$v_{n+2} = f(v_{n+1}) \geq f(2) = -0,05 \times 4 + 1,1 \times 2 = -0,2 + 2,2 = 2. \quad \checkmark$$

— **Majoration** : $v_{n+1} \leq 6$ et f croissante, donc :

$$v_{n+2} = f(v_{n+1}) \leq f(6) = 4,8 \leq 6. \quad \checkmark$$

La propriété est héréditaire. La suite (v_n) est **décroissante** et **minorée** par 2.

Question 4. Convergence

Toute suite décroissante et minorée est convergente. **La suite (v_n) converge.**

Question 5a. Équation satisfaite par la limite

Soit $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Par continuité de f et passage à la limite dans $v_{n+1} = f(v_n)$:

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = -0,05\ell^2 + 1,1\ell \iff 0 = -0,05\ell^2 + 0,1\ell \iff 0 = \ell(-0,05\ell + 0,1).$$

Les solutions sont $\ell = 0$ ou $\ell = 2$. Comme $v_n \geq 2$ pour tout n , on a nécessairement $\ell = 2$.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2.}$$

Question 5b. Interprétation

La population du milieu B se **stabilise à long terme** autour de **2 milliers d'individus**.

Partie C — Comparaison des deux populations

Question 1. Première année où $u_n < 3$

On résout $6 \times (0,93)^n < 3$:

$$(0,93)^n < 0,5 \implies n \ln(0,93) < \ln(0,5) \implies n > \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,93)} = \frac{-0,6931}{-0,07257} \approx 9,55.$$

Donc le plus petit entier vérifiant cela est $n = 10$, ce qui correspond à l'année $2025 + 10 = \mathbf{2035}$.

Question 2. Première année où $v_n < 3$

On calcule les termes successifs de la suite v_n :

n	v_n (milliers)
0	6{,}000
1	$f(6) = 4,800$
2	$f(4,8) = -0,05 \times 23,04 + 5,28 = -1,152 + 5,28 = 4,128$
3	$f(4,128) \approx -0,852 + 4,541 = 3,689$
4	$f(3,689) \approx -0,680 + 4,058 = 3,378$
5	$f(3,378) \approx -0,570 + 3,716 = 3,146$
6	$f(3,146) \approx -0,495 + 3,461 = \mathbf{2,966}$

Le premier rang pour lequel $v_n < 3$ est $n = 6$, soit l'année $2025 + 6 = \mathbf{2031}$.

Question 3. Comparaison des limites

$\lim u_n = 0$ et $\lim v_n = 2$. Puisque $u_n \rightarrow 0 < 2$ et $v_n \rightarrow 2$, à partir d'un certain rang $v_n > u_n$: **la population B finira par être supérieure à la population A.**

Question 4. Programme Python — Première année où $v_n > u_n$

```
n = 0
u = 6
v = 6
while v <= u:
    u = 0.93 * u
    v = -0.05 * v**2 + 1.1 * v
    n = n + 1
print(n)
```

Trace d'exécution :

n	u_n	v_n	$v \leq u$?
1	5{,}58	4{,}80	Oui
2	5{,}19	4{,}13	Oui
3	4{,}83	3{,}69	Oui
4	4{,}49	3{,}38	Oui
5	4{,}17	3{,}15	Oui
6	3{,}88	2{,}97	Oui

n	u_n	v_n	$v \leq u ?$
7	3{,}61	2{,}82	Oui
8	3{,}36	2{,}70	Oui
9	3{,}12	2{,}61	Oui
10	2{,}90	2{,}53	Oui
11	2{,}70	2{,}47	Oui
12	2{,}51	2{,}42	Oui
13	2{,}33	2{,}37	Oui
14	2{,}17	2{,}33	Non

Le programme affiche $n = 14$, soit l'année $2025 + 14 = \mathbf{2039}$.