

Corrigé — Centres Étrangers 2025 J1 – Exercice 4

Thème : Équation différentielle — Modélisation d'une population de bactéries (logistique)

Barème indicatif : 5 points

On modélise l'évolution d'une population de bactéries à l'aide de l'équation différentielle (E_1) :

$$(E_1) : y' + 0,48 y = \frac{1}{250},$$

où $y(t)$ représente une quantité liée à la population au temps t (exprimé en heures).

Partie A — Résolution de l'équation différentielle (E_1)

Question 1. Vérification que la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{120}$ est solution particulière de (E_1)

On calcule $h'(t) = 0$ (fonction constante). Alors :

$$h'(t) + 0,48 h(t) = 0 + 0,48 \times \frac{1}{120} = \frac{0,48}{120} = \frac{48}{12\,000} = \frac{1}{250}. \quad \checkmark$$

La fonction constante $h(t) = \frac{1}{120}$ est bien solution particulière de (E_1) .

Question 2. Solutions de l'équation homogène associée $y' + 0,48 y = 0$

L'équation homogène est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. Ses solutions sont les fonctions de la forme :

$$y = C e^{-0,48 t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Question 3. Solutions générales de (E_1)

La solution générale d'une équation différentielle linéaire est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène :

$$y(t) = C e^{-0,48 t} + \frac{1}{120}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Partie B — Modèle logistique — Étude de $p(t) = \frac{1}{y(t)}$

On pose $p = \frac{1}{y}$, c'est-à-dire $y = \frac{1}{p}$.

Question 1. Équation différentielle vérifiée par p

On dérive $y = \frac{1}{p}$ par rapport à t :

$$y' = -\frac{p'}{p^2}.$$

En substituant dans (E_1) :

$$-\frac{p'}{p^2} + \frac{0,48}{p} = \frac{1}{250}.$$

On multiplie par $250 p^2$:

$$\begin{aligned} -250 p' + 250 \times 0,48 p &= p^2 \\ -250 p' + 120 p &= p^2 \\ 250 p' &= 120 p - p^2 = p(120 - p). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\boxed{p' = \frac{p(120 - p)}{250}}.$$

Il s'agit d'une **équation logistique** (modèle de Verhulst), avec capacité limite $K = 120$.

Question 2. Expression de $p(t)$ à partir de la solution générale de (E_1)

On part de $y(t) = C e^{-0,48t} + \frac{1}{120}$ et on prend $p = \frac{1}{y}$:

$$p(t) = \frac{1}{C e^{-0,48t} + \frac{1}{120}} = \frac{120}{120 C e^{-0,48t} + 1}.$$

En posant $K = 120 C$:

$$\boxed{p(t) = \frac{120}{1 + K e^{-0,48t}}}.$$

Question 3. Détermination de la constante K à partir de la condition initiale

La population initiale est $p(0) = 30$ (milliers de bactéries) :

$$p(0) = \frac{120}{1 + K} = 30 \implies 1 + K = \frac{120}{30} = 4 \implies K = 3.$$

La solution particulière est donc :

$$\boxed{p(t) = \frac{120}{1 + 3 e^{-0,48t}}}.$$

Question 4. Limite de $p(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = \frac{120}{1 + 3 \times 0} = 120.$$

La population de bactéries tend vers **120** milliers, soit **120 000 bactéries**. Il s'agit de la **capacité limite** (ou portance) du milieu.

Question 5. Instant à partir duquel la population dépasse 60 (milliers)

On résout $p(t) > 60$:

$$\frac{120}{1 + 3e^{-0,48t}} > 60 \implies 1 + 3e^{-0,48t} < 2 \implies 3e^{-0,48t} < 1 \implies e^{-0,48t} < \frac{1}{3}.$$

En passant au logarithme (inégalité qui change de sens car \ln est croissante sur \mathbb{R}_+^*) :

$$-0,48t < \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3 \implies t > \frac{\ln 3}{0,48}.$$

$$t > \frac{1,0986}{0,48} \approx 2,289 \text{ heures.}$$

On convertit : $0,289 \times 60 \approx 17$ minutes.

La population dépasse 60 000 bactéries après environ 2 heures 17 minutes.