Corrigé — Centres Étrangers 2025 J1 – Exercice 3

Thème : Étude d'une fonction logarithmique — Suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

Barème indicatif : 5 points (parties A et B)

On considère la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}.$$

Partie A — Étude de la fonction f

Question 1. Limite de f en -1 par valeurs supérieures

Lorsque $x \to -1^+$, on a $x+1 \to 0^+$ donc $\ln(x+1) \to -\infty$, tandis que $-\frac{x^2}{25} \to -\frac{1}{25}$ (terme fini). Par conséquent :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe de f (par valeurs inférieures).

Question 2. Expression de $f'(x)$

f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ comme composée et somme de fonctions dérivables :

$$f'(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{2x}{25} = \frac{4\times 25 - 2x(x+1)}{25(x+1)} = \frac{100 - 2x^2 - 2x}{25(x+1)}.$$

Question 3. Signe de f' sur $]-1\,;+\infty[$ — monotonie sur $[2\,;6{,}5]$

Sur $]-1\,;+\infty[$, le dénominateur $25(x+1) > 0$. Le signe de f' est donc celui du numérateur :

$$100 - 2x^2 - 2x > 0 \iff x^2 + x - 50 < 0.$$

Les racines de $x^2 + x - 50 = 0$ sont :

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+200}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{201}}{2}.$$

Comme $\sqrt{201} \approx 14{,}18$, les racines valent approximativement $x_1 \approx -7{,}59$ et $x_2 \approx 6{,}59$.

Sur $]-1\,;+\infty[$, la parabole $x^2 + x - 50$ est négative entre ses racines, donc pour $x \in]-1\,;6{,}59[$. Ainsi :

- $f' > 0$ sur $]-1\,;6{,}59[$: f est **strictement croissante**,
- $f' < 0$ sur $]6{,}59\,;+\infty[$: f est strictement décroissante.

En particulier, $[2\,;\,6{,}5] \subset]-1\,;\,6{,}59[$, donc f **est strictement croissante sur** $[2\,;\,6{,}5]$.

Question 4. Existence et unicité d'une solution de $f(x) = x$ sur $[2\,;\,6{,}5]$

On pose $h(x) = f(x) - x$ sur $[2\,;\,6{,}5]$.

Calcul de h aux bornes :

$$h(2) = 4\ln 3 - \frac{4}{25} - 2 \approx 4 \times 1{,}0986 - 0{,}16 - 2 \approx 4{,}3944 - 2{,}16 = 2{,}23 > 0.$$

$$h(6{,}5) = 4\ln(7{,}5) - \frac{42{,}25}{25} - 6{,}5 \approx 4 \times 2{,}0149 - 1{,}69 - 6{,}5 \approx 8{,}06 - 8{,}19 = -0{,}13 < 0.$$

Application du théorème des valeurs intermédiaires : h est continue sur $[2\,;\,6{,}5]$ (car f est dérivable donc continue), $h(2) > 0$ et $h(6{,}5) < 0$. Il existe donc au moins une valeur $\alpha \in]2\,;\,6{,}5[$ telle que $h(\alpha) = 0$.

Unicité : On étudie le signe de $h'(x) = f'(x) - 1$:

$$h'(x) = \frac{100 - 2x^2 - 2x}{25(x+1)} - 1 = \frac{100 - 2x^2 - 2x - 25(x+1)}{25(x+1)} = \frac{75 - 27x - 2x^2}{25(x+1)}.$$

Les racines de $2x^2 + 27x - 75 = 0$ sont $x = \frac{-27 \pm \sqrt{729+600}}{4} = \frac{-27 \pm \sqrt{1329}}{4} \approx \frac{-27 \pm 36{,}5}{4}$.

La racine positive vaut $x_0 \approx \frac{9{,}5}{4} \approx 2{,}36$.

- Sur $[2\,;\,2{,}36]$: $h' > 0$ (on vérifie $h'(2) = \frac{75-54-8}{75} = \frac{13}{75} > 0$).
- Sur $[2{,}36\,;\,6{,}5]$: $h' < 0$ (on vérifie $h'(3) = \frac{75-81-18}{100} = \frac{-24}{100} < 0$).

Donc h est croissante puis décroissante sur $[2\,;\,6{,}5]$. Comme $h(2) > 0$ et $h(6{,}5) < 0$, h s'annule exactement une fois sur $[2{,}36\,;\,6{,}5] \subset [2\,;\,6{,}5]$.

Il existe un unique réel $\alpha \in]2\,;\,6{,}5[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Question 5. Encadrement de α au centième

On calcule $h(x) = f(x) - x$ pour x variant par pas de 0,01 autour de la solution :

$$h(6{,}57) = 4\ln(7{,}57) - \frac{(6{,}57)^2}{25} - 6{,}57 \approx 4 \times 2{,}0239 - 1{,}7266 - 6{,}57 \approx 8{,}0956 - 8{,}2966 \approx -0{,}20.$$

Affinons davantage :

$$h(6{,}40) \approx 4\ln(7{,}40) - \frac{40{,}96}{25} - 6{,}40 \approx 8{,}028 - 1{,}638 - 6{,}40 = -0{,}01 < 0.$$

$$h(6{,}39) \approx 4\ln(7{,}39) - \frac{40{,}83}{25} - 6{,}39 \approx 8{,}024 - 1{,}633 - 6{,}39 = 0{,}001 > 0.$$

On obtient l'encadrement :

$$\boxed{6{,}39 \leq \alpha \leq 6{,}40.}$$

Ces deux valeurs encadrent α avec une précision de 10^{-2}.

Partie B — Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 1. La suite (u_n) est croissante et majorée par 6,5

On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6{,}5$.

Initialisation ($n = 0$) :

$$u_1 = f(u_0) = f(2) = 4\ln 3 - \frac{4}{25} \approx 4{,}394 - 0{,}16 = 4{,}234.$$

On a bien $2 \leq u_0 = 2 < u_1 \approx 4{,}234 \leq 6{,}5$ ✓. De plus, $f(2) \geq 2$ et $f(6{,}5) \approx 4\ln(7{,}5) - \frac{42{,}25}{25} \approx 8{,}06 - 1{,}69 = 6{,}37 \leq 6{,}5$ ✓.

Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6{,}5$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

- f est **croissante** sur $[2\,;\,6{,}5]$ (démontré en question 3). Comme $u_n \leq u_{n+1}$ et $u_n, u_{n+1} \in [2\,;\,6{,}5]$:
$$f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \implies u_{n+1} \leq u_{n+2}. \quad \checkmark$$
- $u_{n+1} \in [2\,;\,6{,}5]$ donc $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \in [f(2)\,;\,f(6{,}5)] \approx [4{,}23\,;\,6{,}37] \subset [2\,;\,6{,}5]$. ✓

La propriété est héréditaire.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6{,}5$.

La suite (u_n) est **croissante** et **majorée** par 6,5.

Question 2. Convergence de la suite

Toute suite croissante et majorée est convergente (théorème de la limite monotone). **La suite (u_n) est donc convergente.**

Question 3. Valeur de la limite

Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, et puisque f est continue sur $]-1\,;\,+\infty[$, on obtient :

$$\ell = f(\ell).$$

C'est précisément l'équation $h(\ell) = 0$ dont l'unique solution dans $[2\,;\,6{,}5]$ est α.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha \approx 6{,}39.}$$