Corrigé — Centres Étrangers 2025 J1 – Exercice 2

Thème : QCM — Géométrie dans l'espace (droites, plans, angles)

Barème indicatif : 4 points

On dispose des données suivantes :

- $A(-3\,;\,1\,;\,4)$ et $B(1\,;\,5\,;\,2)$,
- Plan $\mathcal{P}$ d'équation $4x+4y-2z+3=0$,
- Plan $\mathcal{P}'$ d'équation $2x+y+6z+5=0$,
- Droite (d) de représentation paramétrique : $x=-6+3t$, $y=1$, $z=9-5t$, $t\in\mathbb{R}$.

On calcule $\overrightarrow{AB}=B-A=(4\,;\,4\,;\,-2)$.

Question 1. Position relative de la droite (AB) et de la droite (d)

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}=(3\,;\,0\,;\,-5)$.

Étape 1 — Les droites sont-elles parallèles ? $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont proportionnels si et seulement si $\frac{4}{3}=\frac{4}{0}$: impossible (division par zéro). Les droites ne sont donc **pas parallèles**.

Étape 2 — Ont-elles un point commun ? On cherche si $A\in(d)$. Un point courant de (d) est $(-6+3t\,;\,1\,;\,9-5t)$.

Pour $y=1$: l'équation en y donne $1=1$ pour tout t, donc la condition sur y est toujours vérifiée. En coordonnée x : $-6+3t=-3\Rightarrow t=1$. En coordonnée z : $9-5\times1=4$ ✓.

Le point $A(-3\,;\,1\,;\,4)$ appartient à la droite (d). Comme A appartient aussi à la droite (AB), les deux droites sont **sécantes** en A.

Étape 3 — Sont-elles perpendiculaires ?

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=4\times3+4\times0+(-2)(-5)=12+0+10=22\neq0.$$

Les droites ne sont **pas perpendiculaires**.

Réponse : a. (AB) et (d) sont sécantes et non perpendiculaires.

Question 2. Position de la droite (AB) par rapport au plan $\mathcal{P}$

Le vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\vec{n}=(4\,;\,4\,;\,-2)=2(2\,;\,2\,;\,-1)$.

On remarque que $\overrightarrow{AB}=(4\,;\,4\,;\,-2)=2(2\,;\,2\,;\,-1)$.

Donc $\overrightarrow{AB}$ est **colinéaire** à $\vec{n}$, ce qui signifie que le vecteur directeur de (AB) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

Une droite dont le vecteur directeur est colinéaire à la normale d'un plan est **orthogonale** à ce plan (elle le coupe à angle droit).

Réponse : d. (AB) **est orthogonale au plan** $\mathcal{P}$**.**

Question 3. Position relative des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$

Les vecteurs normaux sont :

$$\vec{n} = (4\,;\,4\,;\,-2) = 2(2\,;\,2\,;\,-1) \quad \text{et} \quad \vec{n}' = (2\,;\,1\,;\,6).$$

Plans parallèles ? Les vecteurs $(2\,;\,2\,;\,-1)$ et $(2\,;\,1\,;\,6)$ ne sont pas proportionnels (par exemple $2/2 \neq 2/1$), donc les plans ne sont pas parallèles.

Plans perpendiculaires ?

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = (2)(2) + (2)(1) + (-1)(6) = 4 + 2 - 6 = 0.$$

Les normales sont perpendiculaires, donc les plans sont **perpendiculaires**.

Réponse : b. $\mathcal{P}$ **et** $\mathcal{P}'$ **sont perpendiculaires.**

Question 4. Mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ avec $C(0\,;\,1\,;\,-1)$

On calcule les vecteurs à partir du sommet A :

$$\overrightarrow{AB} = (4\,;\,4\,;\,-2), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (0-(-3)\,;\,1-1\,;\,-1-4) = (3\,;\,0\,;\,-5).$$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 + 4 \times 0 + (-2)(-5) = 12 + 0 + 10 = 22.$$

Normes :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6.$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9+0+25} = \sqrt{34} \approx 5{,}831.$$

Cosinus de l'angle :

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{22}{6\sqrt{34}} = \frac{22}{6 \times 5{,}831} \approx \frac{22}{34{,}99} \approx 0{,}629.$$

$$\widehat{BAC} = \arccos(0{,}629) \approx 51\text{ř}.$$

Réponse : b. $\widehat{BAC} \approx 51$**ř.**