

Corrigé — Centres Étrangers 2025 J1 – Exercice 1

Thème : Caisses automatiques — Probabilités conditionnelles, loi binomiale, inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Barème indicatif : 6 points

Partie A — Probabilités et arbre pondéré

On note T l'événement « la transaction est frauduleuse » et E l'événement « une erreur est détectée ». Les données du problème sont :

$$P(T) = 0,1, \quad P(E | T) = 0,3, \quad P(\bar{E} | \bar{T}) = 0,85 \implies P(E | \bar{T}) = 0,15.$$

Question 1. Arbre de probabilités

L'arbre est structuré en deux niveaux :

- Première branche : T (probabilité 0,1) et \bar{T} (probabilité 0,9).
- Deuxièmes branches depuis T : E (prob. 0,3) et \bar{E} (prob. 0,7).
- Deuxièmes branches depuis \bar{T} : E (prob. 0,15) et \bar{E} (prob. 0,85).

La probabilité de l'intersection $T \cap E$ se lit directement :

$$P(T \cap E) = P(T) \times P(E | T) = 0,1 \times 0,3 = 0,03.$$

Question 2. Probabilité que la caisse détecte une erreur

Par la formule des probabilités totales, $\{T, \bar{T}\}$ est un système complet d'événements :

$$P(E) = P(T \cap E) + P(\bar{T} \cap E) = 0,03 + P(\bar{T}) \times P(E | \bar{T}).$$

$$P(\bar{T} \cap E) = 0,9 \times 0,15 = 0,135.$$

$$\boxed{P(E) = 0,03 + 0,135 = 0,165.}$$

Question 3. Probabilité que la transaction soit frauduleuse sachant qu'une erreur a été détectée

Par la formule de Bayes :

$$P_E(T) = \frac{P(T \cap E)}{P(E)} = \frac{0,03}{0,165} = \frac{3}{16,5} = \frac{30}{165} = \frac{2}{11} \approx 0,18.$$

Ainsi, même si une erreur est détectée, la transaction n'est frauduleuse que dans environ 18 % des cas.

Partie B — Loi binomiale

On effectue 15 contrôles indépendants. La probabilité qu'une caisse détecte une erreur lors d'un contrôle est $p = P(E) = 0,165$.

On note X le nombre de caisses ayant détecté une erreur parmi les 15 contrôles.

Question 1. Loi de X

Les contrôles sont indépendants, la probabilité de succès est constante : X suit une **loi binomiale** de paramètres $n = 15$ et $p = 0,165$.

$$X \sim \mathcal{B}(15; 0,165).$$

Question 2. Probabilité que exactement 5 caisses détectent une erreur

$$P(X = 5) = \binom{15}{5} \times (0,165)^5 \times (0,835)^{10}.$$

Calcul numérique :

- $\binom{15}{5} = 3003$,
- $(0,165)^5 \approx 1,26 \times 10^{-4}$,
- $(0,835)^{10} \approx 0,179$.

$$P(X = 5) \approx 3003 \times 1,26 \times 10^{-4} \times 0,179 \approx \mathbf{0,068}.$$

Question 3. Probabilité qu'au moins une caisse détecte une erreur

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,835)^{15}.$$

$$(0,835)^{15} \approx 0,0656.$$

$$P(X \geq 1) \approx 1 - 0,0656 \approx 0,93.$$

Question 4. Nombre minimal de contrôles pour que la probabilité d'au moins une détection dépasse 0,99

On cherche le plus petit entier n tel que $P(X_n \geq 1) > 0,99$, où $X_n \sim \mathcal{B}(n; 0,165)$.

$$\begin{aligned} P(X_n \geq 1) &= 1 - (0,835)^n > 0,99 \\ \iff (0,835)^n &< 0,01 \\ \iff n \ln(0,835) &< \ln(0,01) \\ \iff n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} &= \frac{-4,605}{-0,180} \approx 25,6. \end{aligned}$$

Donc il faut au minimum $n = 26$ contrôles.

Partie C — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On dispose de trois variables X_1, X_2, X_3 indépendantes et identiquement distribuées suivant $\mathcal{B}(20; 0,165)$. On pose $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Question 1. Espérance et variance de X_1

$$E(X_1) = n \cdot p = 20 \times 0,165 = 3,3.$$

$$V(X_1) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 20 \times 0,165 \times 0,835 = 2,7555.$$

Question 2. Espérance et variance de S

Par linéarité de l'espérance et par indépendance :

$$E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times 3,3 = \mathbf{9,9}.$$

$$V(S) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3 \times 2,7555 = \mathbf{8,2665}.$$

Question 3. Minoration de $P(6 < S < 14)$ par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On approche $E(S) \approx 10$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev affirme que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|S - E(S)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(S)}{\varepsilon^2}.$$

L'événement $\{6 < S < 14\}$ correspond à $|S - 10| < 4$, soit $\varepsilon = 4$. On en déduit :

$$P(|S - 10| \geq 4) \leq \frac{V(S)}{\varepsilon^2} = \frac{8,2665}{16} \approx 0,517.$$

Par complémentarité :

$$P(6 < S < 14) = 1 - P(|S - 10| \geq 4) \geq 1 - 0,517 = \mathbf{0,483} > 0,48. \quad \checkmark$$