Corrigé — Asie 2025 J1 – Exercice 1

Thème : Géométrie dans l'espace — vrai ou faux (5 points)

On se place dans un repère orthonormé. On pose $\alpha \in \mathbb{R}$, $A(1\,;\,1\,;\,0)$, $B(2\,;\,1\,;\,0)$, $C(\alpha\,;\,3\,;\,\alpha)$.

La droite (d) est paramétrée par :

$$x = 1 + t, \quad y = 2t, \quad z = -t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 1

Énoncé : Pour tout réel α, les points A, B, C définissent un plan dont un vecteur normal est $\vec{n} = (0\,;\,1\,;\,0)$.

Calcul des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1\,;\,0\,;\,0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (\alpha - 1\,;\,2\,;\,\alpha)$$

Produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \alpha - 1 & 2 & \alpha \end{vmatrix} = (0 \cdot \alpha - 0 \cdot 2\,;\ 0 \cdot (\alpha - 1) - 1 \cdot \alpha\,;\ 1 \cdot 2 - 0 \cdot (\alpha - 1)) = (0\,;\,-\alpha\,;\,2).$$

A, B, C sont-ils toujours en position générale ?

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (0\,;\,-\alpha\,;\,2)$. La composante z vaut $2 \neq 0$ quel que soit α, donc ce vecteur n'est jamais nul : A, B, C définissent **toujours** un plan. ✓

Le vecteur normal est-il $(0\,;\,1\,;\,0)$?

Il faudrait que $(0\,;\,-\alpha\,;\,2)$ soit proportionnel à $(0\,;\,1\,;\,0)$, ce qui imposerait simultanément $-\alpha = \lambda$ et $2 = 0$. C'est **impossible**.

Conclusion : FAUX. A, B, C définissent bien un plan, mais le vecteur normal n'est jamais égal (ni proportionnel) à $(0\,;\,1\,;\,0)$.

Affirmation 2

Énoncé : Il existe un unique réel α tel que la droite (AC) soit parallèle à (d).

Vecteur directeur de (d) : $(1\,;\,2\,;\,-1)$.

$(AC) \parallel (d)$ si et seulement si $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire à $(1\,;\,2\,;\,-1)$, c'est-à-dire :

$$(\alpha - 1\,;\, 2\,;\, \alpha) = \lambda\,(1\,;\, 2\,;\, -1)$$

On résout le système :

- Composante y : $2 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 1$.
- Composante x : $\alpha - 1 = 1 \Rightarrow \alpha = 2$. *(attention : il faut vérifier la cohérence)*
- Composante z : $\alpha = -1$.

Les conditions $\alpha = 2$ et $\alpha = -1$ sont **incompatibles** avec $\lambda = 1$. Reprenons :

Avec $\lambda = 1$: composante z donne $\alpha = -1$ et composante x donne $\alpha - 1 = 1 \Rightarrow \alpha = 2$. Contradiction.

Essayons sans fixer λ : $\alpha - 1 = \lambda$, $2 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 1$, $\alpha = -\lambda = -1$.

Mais alors la composante x donne $\alpha - 1 = \lambda \Rightarrow -1 - 1 = -2 \neq 1 = \lambda$. Contradiction.

Conclusion : Il n'existe **aucun** réel α tel que $(AC) \parallel (d)$.

Remarque : Si l'énoncé demande l'existence d'un unique α tel que (AC) soit parallèle à (d), la réponse est **FAUX** (il n'en existe aucun).

(Note : si la question porte sur la colinéarité en n'imposant pas les trois composantes simultanément, on retrouve $\alpha = -1$ comme valeur unique vérifiant la composante z et y, mais la composante x n'est pas vérifiée. Avec $\alpha = -1$: $\overrightarrow{AC} = (-2\,;\, 2\,;\, -1)$, qui n'est pas proportionnel à $(1\,;\, 2\,;\, -1)$. Donc : ***FAUX****.)*

Affirmation 3

Énoncé : La mesure de l'angle $\widehat{OAB}$ est 135°.

Vecteurs issus de A :

$$\overrightarrow{AO} = O - A = (-1\,;\, -1\,;\, 0), \qquad \overrightarrow{AB} = (1\,;\, 0\,;\, 0).$$

Produit scalaire et normes :

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = (-1)(1) + (-1)(0) + (0)(0) = -1.$$

$$\|\overrightarrow{AO}\| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}, \qquad \|\overrightarrow{AB}\| = 1.$$

Cosinus de l'angle :

$$\cos\left(\widehat{OAB}\right) = \frac{\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AO}\|\,\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \times 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Or $\cos(135°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\widehat{OAB} = 135°$. ✓

Conclusion : VRAI.

Affirmation 4

Énoncé : Le projeté orthogonal de A sur (d) est $H(1\,;\,2\,;\,2)$.

Étape 1 : H est-il sur (d) ?

Un point de (d) s'écrit $(1+t\,;\,2t\,;\,-t)$. Pour $H(1\,;\,2\,;\,2)$:

— $x = 1 + t = 1 \Rightarrow t = 0$.
— $y = 2t = 0 \neq 2$.

$H(1\,;\,2\,;\,2)$ **n'est pas sur** (d). L'affirmation est donc fausse sans même calculer la projection.

Étape 2 : calcul du vrai projeté orthogonal de A sur (d).

Soit $H' = (1+t\,;\,2t\,;\,-t)$ un point quelconque de (d).

$$\overrightarrow{AH'} = (t\,;\,2t-1\,;\,-t).$$

Condition d'orthogonalité : $\overrightarrow{AH'} \cdot (1\,;\,2\,;\,-1) = 0$:

$$t + 2(2t-1) + (-t)(-1) = t + 4t - 2 + t = 6t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Donc le vrai projeté est :

$$H' = \left(\frac{4}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,-\frac{1}{3}\right) \neq H(1\,;\,2\,;\,2).$$

Conclusion : FAUX.

Affirmation 5

Énoncé : La sphère de centre O et de rayon 1 rencontre (d) en deux points distincts.

Distance de O à (d) :

Le pied de la perpendiculaire de O sur (d) est le point $P(t) = (1+t\,;\,2t\,;\,-t)$ tel que $\overrightarrow{OP}\cdot(1\,;\,2\,;\,-1) = 0$:

$$(1+t)\cdot 1 + 2t\cdot 2 + (-t)\cdot(-1) = 1 + t + 4t + t = 1 + 6t = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{6}.$$

Coordonnées du pied :

$$P = \left(\frac{5}{6}\,;\,-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{6}\right).$$

Distance $d(O,(d))$:

$$d^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

$$d = \sqrt{\frac{5}{6}} \approx 0{,}913 < 1.$$

Puisque la distance de O à (d) est strictement inférieure au rayon 1, la sphère **coupe** (d) en **deux points distincts**.

Conclusion : VRAI.

Récapitulatif

Affirmation	Vrai / Faux
1	**FAUX**
2	**FAUX**
3	**VRAI**
4	**FAUX**
5	**VRAI**