Corrigˆ' dˆ'taillˆ' gˆ'nˆ'rˆ' avec ChatGPT - ˆ relire

Amˆ'rique du Nord 2025 - Jour 2 - Exercice 4

Notions : Suites numˆ'riques, Limites de suites

Statut : corrigˆ' ˆ vˆ'rifier par le professeur avant diffusion aux ˆ'lˆ¤ves.

Corrigˆ' dˆ'taillˆ' - Amˆ'rique du Nord 2025 - Jour 2 - Exercice 4

Notions : suites rˆ'currentes, suite auxiliaire, limite.

On considˆ¤re la suite \((u_n)\) dˆ'finie par :

\[

u_0=0,\qquad u_1=\frac12,

\]

et, pour tout entier naturel \(n\) :

\[

u_{n+2}=u_{n+1}-\frac14u_n.

\]

Partie A - Conjecture

1. Tableau de valeurs

On calcule successivement :

\[

u_0=0,\qquad u_1=\frac12.

\]

Puis :

\[

u_2=u_1-\frac14u_0=\frac12.

$$
u_3=u_2-\frac14u_1=\frac12-\frac18=\frac38.
$$

$$
u_4=u_3-\frac14u_2=\frac38-\frac18=\frac14.
$$

$$
u_5=u_4-\frac14u_3=\frac14-\frac{3}{32}=\frac{5}{32}.
$$

Le tableau est donc :

$$
\begin{array}{c|cccccc}
n&0&1&2&3&4&5\\
\hline
u_n&0&\frac12&\frac12&\frac38&\frac14&\frac{5}{32}
\end{array}
$$

2. Conjecture

Les valeurs semblent se rapprocher de 0.

On peut conjecturer :

$$
\lim_{n\to+\infty}u_n=0.
$$

Partie B - Suite auxiliaire

On dˆ'finit :

$$
w_n=u_{n+1}-\frac12u_n.
$$

1. Calcul de w_0

$$
w_0=u_1-\frac12u_0=\frac12-\frac12\times 0=\frac12.
$$

2. Nature de (w_n)

Pour tout entier naturel n :

$$
w_{n+1}=u_{n+2}-\frac12u_{n+1}.
$$

Or :

$$
u_{n+2}=u_{n+1}-\frac14u_n.
$$

Donc :

$$
w_{n+1}=u_{n+1}-\frac14u_n-\frac12u_{n+1}
=\frac12u_{n+1}-\frac14u_n.
$$

On factorise :

$$
w_{n+1}=\frac12\left(u_{n+1}-\frac12u_n\right).
$$

\]

Donc :

$$
w_{n+1}=\frac12w_n.
$$

La suite (w_n) est gˆ'omˆ'trique de raison $\frac12$.

3. Expression de w_n

Comme $w_0=\frac12$ et que la raison vaut $\frac12$, on a :

$$
w_n=w_0\left(\frac12\right)^n.
$$

Donc :

$$
w_n=\left(\frac12\right)^{n+1}.
$$

4. Relation entre u_{n+1} et u_n

Comme :

$$
w_n=u_{n+1}-\frac12u_n,
$$

on obtient :

$$
u_{n+1}=w_n+\frac12u_n.
$$

Donc :

\[

u_{n+1}=\left(\frac12\right)^{n+1}+\frac12u_n.

\]

5. Expression explicite de \(u_n\)

On dˆ'montre par rˆ'currence que, pour tout \(n\in\mathbb N\) :

\[

u_n=\frac{n}{2^n}.

\]

Initialisation : pour \(n=0\),

\[

\frac{0}{2^0}=0=u_0.

\]

La propriˆ'tˆ' est vraie au rang \(0\).

Hˆ'rˆ'ditˆ' : supposons que :

\[

u_n=\frac{n}{2^n}.

\]

Alors :

\[

u_{n+1}=\left(\frac12\right)^{n+1}+\frac12u_n.

\]

En utilisant l'hypothˆ¤se de rˆ'currence :

\[

u_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac12\cdot\frac{n}{2^n}

=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{n}{2^{n+1}}

=\frac{n+1}{2^{n+1}}.

\]

La propriˆ'tˆ' est donc vraie au rang \(n+1\).

Conclusion :

\[

\forall n\in\mathbb N,\qquad u_n=\frac{n}{2^n}.

\]

Partie C - ˆ tude de \((u_n)\)

1. Dˆ'croissance ˆ partir du rang 1

Pour \(n\geq 1\), on compare :

\[

u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}

\]

et :

\[

u_n=\frac{n}{2^n}.

\]

On calcule :

\[

\frac{u_{n+1}}{u_n}

=\frac{n+1}{2^{n+1}}\times\frac{2^n}{n}

=\frac{n+1}{2n}.

\]

Pour \(n\geq 1\),

\[

\frac{n+1}{2n}\leq 1

\]

car :

\[

n+1\leq 2n

\]

ˆ'quivaut ˆ :

\[

1\leq n.

\]

Donc :

\[

u_{n+1}\leq u_n.

\]

La suite est dˆ'croissante ˆ partir du rang \(1\).

2. Convergence

Pour tout \(n\), on a :

\[

u_n=\frac{n}{2^n}\geq 0.

\]

La suite est donc minorˆ'e par \(0\).

Elle est dˆ'croissante ˆ partir du rang \(1\), donc elle est convergente.

3. Limite

On admet que la limite \(\ell\) est solution de l'ˆ'quation issue de la relation de rˆ'currence :

\[

\ell=\ell-\frac14\ell.

\]

Donc :

\[

\frac14\ell=0.

\]

Ainsi :

\[

\ell=0.

\]

Conclusion :

\[

\lim_{n\to+\infty}u_n=0.

\]

Points ˆ relire

- Vˆ'rifier dans le PDF source que la rˆ'currence est bien \(u_{n+2}=u_{n+1}-\frac14u_n\), car l’extraction OCR de l’ˆ'noncˆ' est dˆ'gradˆ'e.