Corrigé — Amérique du Nord 2025 J2 – Exercice 3

Thème : Probabilités — Probabilités conditionnelles, loi binomiale, formule de Bayes

---

Données de l'énoncé :

- $P(C) = 0{,}02$: probabilité qu'une personne soit contaminée par le virus.
- $P(V) = 0{,}90$: probabilité qu'une personne soit vaccinée.
- $P(V \mid C) = 0{,}62$: probabilité d'être vacciné sachant qu'on est contaminé.

On note C l'événement « être contaminé », V l'événement « être vacciné », $\bar{C}$ et $\bar{V}$ leurs complémentaires.

Question 1. Lire les données de probabilité dans l'énoncé.

En lecture directe :

$$\boxed{P(C) = 0{,}02 \qquad P(V) = 0{,}90 \qquad P(V \mid C) = 0{,}62}$$

Question 2a. Calculer $P(C \cap V)$.

Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$P(C \cap V) = P(C) \times P(V \mid C) = 0{,}02 \times 0{,}62 = \mathbf{0{,}0124}$$

$$\boxed{P(C \cap V) = 0{,}0124}$$

Question 2b. Calculer $P(\bar{C} \cap V)$.

Les événements C et $\bar{C}$ forment une partition, donc :

$$P(V) = P(C \cap V) + P(\bar{C} \cap V)$$

On en déduit :

$$P(\bar{C} \cap V) = P(V) - P(C \cap V) = 0{,}90 - 0{,}0124 = \mathbf{0{,}8876}$$

$$\boxed{P(\bar{C} \cap V) = 0{,}8876}$$

Question 3. Compléter l'arbre de probabilités.

On calcule d'abord $P(V \mid \bar{C})$:

$$P(V \mid \bar{C}) = \frac{P(\bar{C} \cap V)}{P(\bar{C})} = \frac{0{,}8876}{1 - 0{,}02} = \frac{0{,}8876}{0{,}98} \approx 0{,}9057$$

Donc $P(\bar{V} \mid \bar{C}) = 1 - 0{,}9057 \approx 0{,}0943$.

L'arbre pondéré complet :

$$\begin{aligned} C\ (0{,}02) \quad & \begin{cases} V & (0{,}62) \\ \bar{V} & (0{,}38) \end{cases} \\ \bar{C}\ (0{,}98) \quad & \begin{cases} V & (\approx 0{,}9057) \\ \bar{V} & (\approx 0{,}0943) \end{cases} \end{aligned}$$

Vérification :

$$P(V) = P(C) \cdot P(V \mid C) + P(\bar{C}) \cdot P(V \mid \bar{C}) = 0{,}02 \times 0{,}62 + 0{,}98 \times 0{,}9057 \approx 0{,}0124 + 0{,}8876 = 0{,}90 \checkmark$$

Question 4. Calculer $P(C \mid V)$ et interpréter.

On applique la **formule de Bayes** :

$$P(C \mid V) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{0{,}0124}{0{,}90} \approx 0{,}01378$$

$$\boxed{P(C \mid V) \approx 0{,}0138}$$

Interprétation : Parmi les personnes vaccinées, environ 1,38 % ont été contaminées par le virus. Autrement dit, le fait d'être vacciné est associé à une très faible probabilité d'être contaminé.

Question 5a. Parmi les non contaminés, les vaccinés sont-ils plus de 10 fois plus nombreux que les non vaccinés ?

Parmi les non contaminés ($\bar{C}$), on compare $P(V \mid \bar{C})$ et $P(\bar{V} \mid \bar{C})$:

$$\frac{P(V \mid \bar{C})}{P(\bar{V} \mid \bar{C})} = \frac{0{,}9057}{0{,}0943} \approx 9{,}6$$

Le rapport est environ $9{,}6 < 10$.

$$\boxed{\textbf{Affirmation 5a : FAUSSE} \quad (\text{rapport} \approx 9{,}6 < 10)}$$

Question 5b. Vérifier si $P(\bar{C} \mid V) > 0{,}98$.

$$P(\bar{C} \mid V) = 1 - P(C \mid V) \approx 1 - 0{,}0138 = 0{,}9862$$

On compare : $0{,}9862 > 0{,}98$ — oui !

$$\boxed{\textbf{Affirmation 5b : VRAIE} \quad \left(P(\bar{C} \mid V) \approx 0{,}9862 > 0{,}98\right)}$$

Question 6a. Loi suivie par X (nombre de personnes contaminées dans un groupe de 20).

On choisit 20 personnes indépendamment. Chacune est contaminée avec probabilité $P(C) = 0{,}02$, indépendamment des autres. On est dans le cadre d'un **schéma de Bernoulli** à $n = 20$ épreuves.

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(20\,;\,0{,}02)}$$

Question 6b. Calculer $P(X = 4)$.

La loi binomiale donne :

$$P(X = 4) = \binom{20}{4} \times (0{,}02)^4 \times (0{,}98)^{16}$$

On calcule chaque facteur :

$$\binom{20}{4} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4!} = \frac{116\,280}{24} = 4\,845$$

$$(0{,}02)^4 = (2 \times 10^{-2})^4 = 16 \times 10^{-8} = 1{,}6 \times 10^{-7}$$

$$(0{,}98)^{16} = e^{16\ln(0{,}98)} \approx e^{16 \times (-0{,}02020)} \approx e^{-0{,}3232} \approx 0{,}7238$$

Donc :

$$P(X = 4) = 4\,845 \times 1{,}6 \times 10^{-7} \times 0{,}7238$$

$$= 4\,845 \times 1{,}158 \times 10^{-7}$$

$$\approx 5{,}61 \times 10^{-4}$$

$$\boxed{P(X=4) \approx 5{,}6 \times 10^{-4} \approx 0{,}056\,\%}$$

Cet événement est très peu probable : dans un groupe de 20 personnes, il est très rare d'observer exactement 4 personnes contaminées quand le taux de contamination est de 2 %.