

Corrigé d'entraînement avec ChatGPT - à relire

Amérique du Nord 2025 - Jour 2 - Exercice 2

Notions : Vecteurs, droites et plans, Orthogonalité dans l'espace

Statut : corrigé à vérifier par le professeur avant diffusion aux élèves.

Corrigé d'entraînement - Amérique du Nord 2025 - Jour 2 - Exercice 2

Notions : géométrie dans l'espace, droites, plans, orthogonalité.

La droite (D) a pour représentation paramétrique :

```
\[
\begin{cases}
x=3-t\\
y=-2+3t\\
z=1+4t
\end{cases}
\]
```

Un vecteur directeur de (D) est donc :

```
\[
\vec{u}=(-1;3;4).
\]
```

Le plan (P) a pour équation :

```
\[
2x-3y+z-6=0.
\]
```

Un vecteur normal à (P) est :

```
\[
```

$\vec{n}=(2;-3;1).$

\]

1. Droite (D') parallèle à (D)

La droite (D') a pour représentation :

\[

\begin{cases}

$$x=2+2t$$

$$y=4-6t$$

$$z=9-8t$$

\end{cases}

\]

Un vecteur directeur de (D') est :

\[

$$\vec{u}'=(2;-6;-8).$$

\]

Or :

\[

$$\vec{u}'=-2(-1;3;4)=-2\vec{u}.$$

\]

Les vecteurs directeurs sont colinéaires.

Conclusion : l'affirmation est vraie.

2. Orthogonalité de (D) avec le plan $((ABC))$

On considère :

\[

$A(-2;3;1), \quad B(1;3;-4), \quad C(6;3;9).$

\]

On calcule :

\[

$\overrightarrow{AB}=(3;0;-5),$

\quad

$\overrightarrow{AC}=(8;0;8).$

\]

Ces deux vecteurs ont une deuxième coordonnée nulle. Le plan $((ABC))$ est donc le plan d'équation $(y=3)$, dont un vecteur normal est :

\[

$(0;1;0).$

\]

Pour que (D) soit orthogonale au plan $((ABC))$, un vecteur directeur de (D) devrait être colinéaire à $(0;1;0)$.

Or :

\[

$\vec{u}=(-1;3;4)$

\]

n'est pas colinéaire à $(0;1;0)$.

****Conclusion : **** l'affirmation est fausse.

3. Droites (D) et (Δ) sécantes

La droite (Δ) a pour représentation :

\[

\begin{cases}

$$x = -4 + 2s$$

$$y = 1 - 3s$$

$$z = 2 + s$$

\end{cases}

\setminus

On cherche s'il existe t et s tels que les coordonnées soient égales.

Avec les deux premières coordonnées :

\setminus

$$3 - t = -4 + 2s$$

\setminus

donc :

\setminus

$$t = 7 - 2s.$$

\setminus

Et :

\setminus

$$-2 + 3t = 1 - 3s$$

\setminus

donc :

\setminus

$$t + s = 1.$$

\setminus

En remplaçant t :

\setminus

$$7 - 2s + s = 1,$$

\setminus

d'où :

\[

$$s=6, \text{ quand } t=-5.$$

\]

On vérifie alors la troisième coordonnée :

\[

$$1+4t=1+4(-5)=-19,$$

\]

tandis que :

\[

$$2+s=2+6=8.$$

\]

Les trois coordonnées ne sont pas égales.

Conclusion : les droites ne sont pas sécantes. L'affirmation est fausse.

4. Projet orthogonal de (E) sur (P)

On considère :

\[

$$E(-5;0;2), \text{ quand } F(-3;-3;3).$$

\]

Calculons :

\[

$$\overrightarrow{EF}=F-E=(2;-3;1).$$

\]

Or $(2;-3;1)$ est un vecteur normal au plan (P) .

Il reste à vérifier que (F) appartient à (P) :

[

$$2(-3) - 3(-3) + 3 - 6 = -6 + 9 + 3 - 6 = 0.$$

]

Donc $(F \cap P)$, et la droite $((EF))$ est orthogonale à (P) .

Conclusion : (F) est bien le projeté orthogonal de (E) sur (P) . L'affirmation est vraie.

5. Valeur du paramètre (a)

Le plan (P) a pour équation :

[

$$-3x + y - a^2z + 3 = 0$$

]

d'après l'énoncé extrait. Un vecteur normal à (P) est donc :

[

$$\vec{n} = (-3; 1; -a^2).$$

]

Pour que la droite (D) soit parallèle au plan (P) , il faut que son vecteur directeur soit orthogonal au vecteur normal du plan :

[

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0.$$

]

On calcule :

[

$$(-1)(-3) + 3 \cdot 1 + 4(-a^2) = 0.$$

]

Donc :

\[

$$3+3-4a^2=0,$$

\]

c'est-à-dire :

\[

$$a^2=\frac{3}{2}.$$

\]

Il y a donc deux valeurs possibles :

\[

$$a=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

\quad\text{ou}\quad

$$a=-\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

\]

Conclusion : il n'existe pas exactement une valeur de a , mais deux. L'affirmation est fautive.

Points à relire

- Vérifier dans le PDF source que le coefficient du plan (P) est bien $(-a^2z)$. Si c'était $(-az)$, la conclusion de la question 5 changerait.