Corrigé — Amérique du Nord 2025 J2 – Exercice 1

Thème : Fonctions — Étude de $f(x) = xe^{-x} + 2x - 1$, intégration par parties, aire

---

On pose $f(x) = xe^{-x} + 2x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Partie A — Étude de f

Question 1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

En $-\infty$:

— $\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}$: quand $x \to -\infty$, $-x \to +\infty$, donc $e^{-x} \to +\infty$. Le produit xe^{-x} est le produit d'un terme tendant vers $-\infty$ par un terme tendant vers $+\infty$: $xe^{-x} \to -\infty$ (car $|x| \cdot e^{-x} \to +\infty$).

— $\lim_{x\to-\infty}(2x - 1) = -\infty$.

Donc :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + (-\infty) = -\infty$$

En $+\infty$:

— Par les croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

— $\lim_{x\to+\infty}(2x - 1) = +\infty$.

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 + (+\infty) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Question 2. Calculer $f'(x)$.

On dérive terme à terme, en utilisant la règle du produit pour xe^{-x} :

$$(xe^{-x})' = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$$

Donc :

$$f'(x) = (1 - x)e^{-x} + 2$$

$$\boxed{f'(x) = (1 - x)e^{-x} + 2}$$

Question 3. Calculer $f''(x)$.

On dérive $f'(x) = (1-x)e^{-x} + 2$:

$$\left[(1-x)e^{-x}\right]' = (1-x)' \cdot e^{-x} + (1-x) \cdot (e^{-x})'$$

$$= (-1)e^{-x} + (1-x)(-e^{-x})$$

$$= -e^{-x} - (1-x)e^{-x}$$

$$= e^{-x}\left[-1-(1-x)\right] = e^{-x}(-1-1+x) = (x-2)e^{-x}$$

Donc :

$$f''(x) = (x-2)e^{-x}$$

$$\boxed{f''(x) = (x-2)e^{-x}}$$

Question 4. Étudier la convexité de f.

Comme $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f''(x) = (x-2)e^{-x}$ est celui de $(x-2)$:

— $f''(x) < 0 \iff x < 2$: $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur $]-\infty\,;\,2[$.
— $f''(x) = 0 \iff x = 2$: **point d'inflexion** en $x = 2$.
— $f''(x) > 0 \iff x > 2$: $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur $]2\,;\,+\infty[$.

Coordonnées du point d'inflexion :

$$f(2) = 2e^{-2} + 4 - 1 = 2e^{-2} + 3$$

$$\boxed{I\left(2\,;\,3+2e^{-2}\right) \text{ est le point d'inflexion}}$$

Question 5. Étudier les variations de f'.

$f'' = (x-2)e^{-x}$:

— Pour $x < 2$: $f''(x) < 0$, donc f' est **décroissante** sur $]-\infty\,;\,2[$.
— Pour $x > 2$: $f''(x) > 0$, donc f' est **croissante** sur $]2\,;\,+\infty[$.

f' admet donc un **minimum en** $x = 2$:

$$f'(2) = (1-2)e^{-2} + 2 = -e^{-2} + 2 = 2 - \frac{1}{e^2}$$

Or $\frac{1}{e^2} \approx 0{,}135 < 2$, donc :

$$f'(2) = 2 - \frac{1}{e^2} > 0$$

Question 6. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'après la question 5, le **minimum de** f' **sur** $\mathbb{R}$ est $f'(2) = 2 - e^{-2} > 0$.

Donc $f'(x) \geq f'(2) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) > 0$ **pour tout** $x \in \mathbb{R}$**, donc** f **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$**.**

Question 7. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$ et que $\alpha \in]0\,;\,1[$.

Existence et unicité : f est continue (comme somme de fonctions continues) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$. Par le **théorème des valeurs intermédiaires** (corollaire sur les fonctions continues strictement monotones), f s'annule en un unique point α.

Localisation : On évalue f en 0 et 1 :

$$f(0) = 0 \cdot e^0 + 0 - 1 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 \cdot e^{-1} + 2 - 1 = e^{-1} + 1 \approx 0{,}368 + 1 = 1{,}368 > 0$$

$f(0) < 0 < f(1)$ et f est continue sur $[0\,;\,1]$, donc par le T.V.I., il existe $\alpha \in]0\,;\,1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Encadrement plus précis :

$$f(0{,}3) = 0{,}3e^{-0{,}3} + 0{,}6 - 1 \approx 0{,}3 \times 0{,}7408 - 0{,}4 \approx 0{,}2222 - 0{,}4 = -0{,}178 < 0$$

$$f(0{,}4) = 0{,}4e^{-0{,}4} + 0{,}8 - 1 \approx 0{,}4 \times 0{,}6703 - 0{,}2 \approx 0{,}2681 - 0{,}2 = 0{,}068 > 0$$

Donc $\alpha \in]0{,}3\,;\,0{,}4[$.

$$\boxed{\alpha \in]0\,;\,1[\quad \text{(précisément dans }]0{,}3\,;\,0{,}4[)}$$

Question 8. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite $\Delta : y = 2x - 1$.

On calcule la différence $f(x) - (2x - 1)$:

$$f(x) - (2x - 1) = xe^{-x} + 2x - 1 - 2x + 1 = xe^{-x}$$

On étudie le signe de xe^{-x} (sachant que $e^{-x} > 0$ toujours) :

- Si $x > 0$: $xe^{-x} > 0 \implies \mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de Δ.
- Si $x = 0$: $xe^{-x} = 0 \implies \mathcal{C}_f$ et Δ se rejoignent au point $(0\,; -1)$.
- Si $x < 0$: $xe^{-x} < 0 \implies \mathcal{C}_f$ est **en-dessous** de Δ.

Conclusion : La droite Δ est **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $(0\,; -1)$. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ pour $x > 0$ et en-dessous pour $x < 0$.

Vérification : $f'(0) = (1 - 0)e^0 + 2 = 1 + 2 = 3 \neq 2\ldots$ Attention : la pente de Δ est 2, et $f'(0) = 3 \neq 2$, donc Δ n'est pas la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 0$ au sens habituel. En revanche, Δ est une asymptote oblique en $-\infty$ car $f(x) - (2x - 1) = xe^{-x} \to 0$ quand $x \to -\infty$.

$$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \Delta \text{ pour } x > 0,\ \text{en-dessous pour } x < 0,\ \text{et les coupe en } (0\,; -1)}$$

Partie B — Intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^n xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

Question 1. Calculer I_n par intégration par parties.

On pose $u = x$ et $v' = e^{-x}$, ce qui donne $u' = 1$ et $v = -e^{-x}$.

La formule d'**intégration par parties** est $\displaystyle\int_a^b uv'\,\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,\mathrm{d}x$.

$$I_n = \left[x \cdot (-e^{-x})\right]_1^n - \int_1^n 1 \cdot (-e^{-x})\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[-xe^{-x}\right]_1^n + \int_1^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(-ne^{-n} + 1 \cdot e^{-1}\right) + \left[-e^{-x}\right]_1^n$$

$$= -ne^{-n} + e^{-1} + \left(-e^{-n} + e^{-1}\right)$$

$$= -ne^{-n} + e^{-1} - e^{-n} + e^{-1}$$

$$= 2e^{-1} - (n + 1)e^{-n}$$

$$\boxed{I_n = \frac{2}{e} - (n+1)e^{-n}}$$

Question 2a. Exprimer l'aire du domaine D_n délimité par $\mathcal{C}_f$, la droite Δ et les droites $x = 1$ et $x = n$.

D'après la question 8, $f(x) - (2x - 1) = xe^{-x}$. Pour $x \in [1\,;\,n]$ $(x > 0)$, $xe^{-x} > 0$, donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ. L'aire du domaine D_n est :

$$\text{Aire}(D_n) = \int_1^n \left[f(x) - (2x-1)\right] \mathrm{d}x = \int_1^n xe^{-x}\, \mathrm{d}x = I_n$$

$$\boxed{\text{Aire}(D_n) = I_n = \frac{2}{e} - (n+1)e^{-n}}$$

Question 2b. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Par les **croissances comparées**, $\lim_{n\to+\infty} ne^{-n} = 0$, donc aussi $\lim_{n\to+\infty}(n+1)e^{-n} = 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{2}{e} - 0 = \frac{2}{e}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{2}{e}}$$

Interprétation : L'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, la droite Δ, et les droites $x = 1$ et $x = +\infty$ est **finie**, égale à $\dfrac{2}{e} \approx 0{,}736$ unités d'aire.