

Exercice 3. (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points suivants :

$$A(1 ; 3 ; 0), B(-1 ; 4 ; 5), C(0 ; 1 ; 0) \text{ et } D(-2 ; 2 ; 1).$$

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .

3. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC) .

b. Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$2x - y + z + 1 = 0.$$

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .

4. On appelle H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3} ; \frac{4}{3} ; \frac{5}{3}\right)$.

Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) .

5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}B \times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base.

a. Montrer que $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

b. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

6. On considère la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -3k \\ z = 1 + k \end{cases}, \text{ où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?