Exercice 3. (5 points)

On munit le plan d'un repère orthonormé.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x} \text{ et, pour } n \geq 1,\ f_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-x}\ .$$

Pour tout entier naturel n, on note C_n la courbe représentative de la fonction f_n.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geq 1$

On considère un entier naturel $n \geq 1$.

1. a. On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.
Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$f_n'(x) = (n - x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

b. Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$	$\searrow$	0

2. Justifier par le calcul que le point $A\ (1;\ \mathrm{e}^{-1})$ appartient à la courbe C_n.

Partie B : Étude des intégrales $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \geq 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0\,;1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Sur le graphique en **ANNEXE (page 9/9),** on a représenté les courbes C_0, C_1, C_2, C_{10} et C_{100}.

a. Donner une interprétation graphique de I_n.

b. Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Calculer I_0.

3. a. Soit n un entier naturel.
Démontrer que pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n.$$

b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

4. Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ.

5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}$$

6. **a.** Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.
   b. Démontrer que $\ell = 0$. On pourra utiliser la question **6.a.**.

On donne ci-dessous le script de la fonction `mystere`, écrite en langage Python. On a importé la constante e.

```
def mystere(n):
     I = 1 - 1/e
     L = [I]
     for i in range(n):
          I = (i + 1)*I - 1/e
          L.append(I)
     return L
```

7. Que renvoie `mystere(100)` dans le contexte de l'exercice ?