

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la **partie A**.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6,5$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ .
3. On rappelle que le réel α , défini dans la **partie A**, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2 ; 6,5]$.
Justifier que $\ell = \alpha$.

Exercice 4 (4 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$ où y est une fonction de la variable t définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $h(t) = \frac{1}{120}$.
Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1) .
2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1) .

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture. À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu. On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t , exprimé en heure. On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a $p(t) = \frac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2) , alors y est solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.

2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1) , alors $p = \frac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2) .
Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$p(t) = \frac{120}{1+Ke^{-0,48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$

3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K .
4. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus. *On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.*