

EXERCICE 4 (5 points)

On considère f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et on appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.

(a) Montrer que $g'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

(b) Pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}$$

2. (a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

(b) Interpréter graphiquement ce résultat.

3. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

(b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.

Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

(c) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.

4. On pose $I = \int_1^2 f(x)dx$.

(a) Calculer I .

(b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et que :

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)}{8x^2\sqrt{x}}$$

(a) En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

(b) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.