Exercice 1 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.

3. Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

4. Étudier la convexité de la fonction f.

5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbf{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbf{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

7. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
Donner un encadrement de α, au centième près.

8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
Étudier la position relative de la courbe C_f par rapport à la droite Δ.

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe C_f, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n.

2.

a. Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n.

b. Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.