

Exercice 2 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$. Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et $3 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à $0,01 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0,70 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Partie A : étude d'un modèle discret.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

- Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0,3 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.
- Pour tout entier naturel n , on note v_n le taux de chlore, en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$.
On admet que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3$.
 - Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.
 - Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
- À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.
- Reproduire et compléter l'algorithme ci-contre écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.
- Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def alerte_chlore(s) :  
    n=0  
    v=0.7  
    while ..... :  
        n= .....  
        v= .....  
    return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu.

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,08y + \frac{q}{50}$, où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

- Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$ où C est une constante réelle.
- Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.
 - On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à $0,7 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.
On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de $2 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.