Exercice 2 **(6 points)**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty; 1[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.

b. En déduire une interprétation graphique.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, on a $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$.

b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, on a $f''(x) = \frac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$.

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, on a : $e^x \geq (-2x-1)(x-1)$.

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.