Exercice 3 (5 points)

.

On considère l'équation différentielle (E_0) : $y' = y$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».

5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.

7. Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x))\mathrm{d}x.$$