

Exercice 1. (5 points) Thèmes : probabilités, suites

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement.

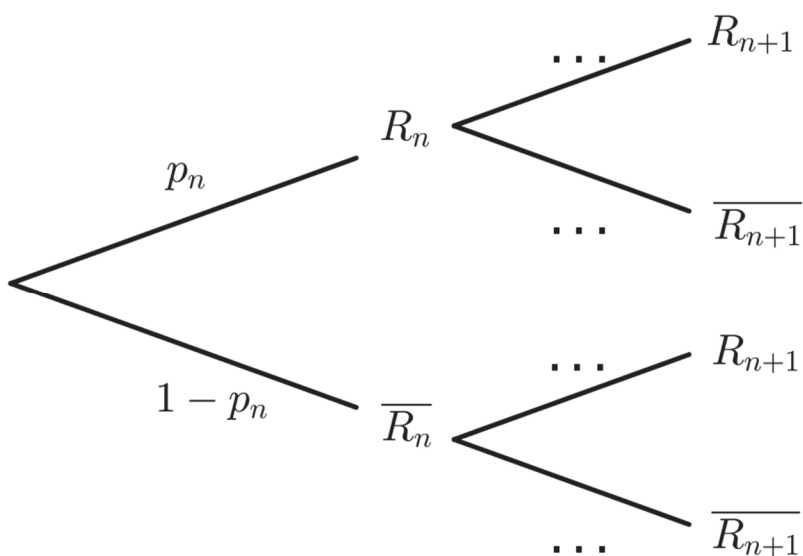
Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente, que :

- ▶ si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant ;
- ▶ si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- ▶ R_n l'événement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la n -ième séance »,
- ▶ p_n la probabilité de l'événement R_n . On considère que $p_0 = 0,6$.

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n , on a :
- $$p_{n+1} = 0,6 p_n + 0,3.$$
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = p_n - 0,75$.
- Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - Démontrer que, pour tout entier naturel n : $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$.
 - En déduire que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ .
 - Interpréter la valeur de ℓ dans le cadre de l'exercice.

Partie B

Après de nombreuses séances d'entraînement, l'entraîneur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de 0,75 et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies.

- Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
- Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.
- Calculer $P(X \geq 9)$, à 10^{-3} près.