Chapitre 11

Combinatoire et dénombrement

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Dans le cadre d'un problème de dénombrement, utiliser une représentation adaptée (ensembles, arbres, tableaux, diagrammes) et reconnaître les objets à dénombrer.
- Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (informatique, génétique, théorie des jeux, probabilités, etc.).

Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Démonstration par dénombrement de la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.
- Démonstrations de la relation de Pascal (par le calcul et par une méthode combinatoire).

Exemples dálgorithme — Programme officiel (BO)

- Pour un entier n donné, génération de la liste des coefficients $\binom{n}{k}$ à l'aide de la relation de Pascal.
- Génération des permutations d'un ensemble fini, ou tirage aléatoire d'une permutation.
- Génération des parties à 2, 3 éléments d'un ensemble fini.

A) Arrangements et permutations

Définition 1

*On appelle **factorielle** de n le nombre noté :*

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Par convention $0! = 1$.

Définition 2

*Soient A un ensemble fini non vide à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n. Un **arrangement** de k éléments de A (ou k-arrangement) est un k-uplet d'éléments distincts de A.*

Propriété 1

Soient n un entier naturel non nul et k un entier compris entre 1 et n. Le nombre de k-arrangements d'un ensemble E à n éléments est :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Définition 3

*Une **permutation** d'un ensemble E à n éléments est un n-uplet d'éléments distincts de E.*

Propriété 2

Le nombre de permutations d'un ensemble E à n éléments est $n!$.

B) Combinaisons

Propriété 3

Le nombre de parties d'un ensemble fini à n éléments est 2^n.

Démonstration. Chaque élément peut être inclus (1) ou exclu (0) d'une partie. Il y a donc 2^n suites binaires de longueur n, correspondant aux 2^n parties. $\square$

1) Nombre de combinaisons

Définition 4

*Une **combinaison** de k éléments de E est une partie de E à k éléments. Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$.*

Propriété 4

Pour $k \leq n$:

1. $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ *et* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. ***Relation de Pascal :*** *si* $1 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
3. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.