Propriété 2

Pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbf{R}$, il existe une unique solution F de $y' = f$ sur I vérifiant $F(x_0) = y_0$.

Propriété 3

Si F est une primitive de f et G de g sur I, et $\lambda \in \mathbf{R}$:
- *$F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.*
- *λF est une primitive de λf sur I.*

A) Primitives de fonctions composées

Forme de f	Primitive (sans constante)	Conditions
$f' + g'$	$f + g$	f, g dérivables
$\lambda f'$	λf	f dérivable
$f'\, f^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$	$\dfrac{f^{n+1}}{n+1}$	f dérivable
$\dfrac{f'}{f^2}$	$-\dfrac{1}{f}$	f dérivable, $f \neq 0$
$\dfrac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}$	f dérivable, $f > 0$
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert$	f dérivable, $f \neq 0$
$f'\, e^f$	e^f	f dérivable
$f' \times (g' \circ f)$	$g \circ f$	

B) Équation différentielle $y' = ay$

Propriété 4

Les solutions de $y' = ay$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax}$, $k \in \mathbf{R}$. Pour tout (x_0, y_0), il existe une unique solution vérifiant $y(x_0) = y_0$.

Démonstration. $f_k(x) = ke^{ax}$ vérifie $f_k'(x) = kae^{ax} = af_k(x)$, donc f_k est solution.
Réciproquement, si y est solution, posons $g(x) = y(x)e^{-ax}$. Alors $g'(x) = y'(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = ay(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = 0$, donc g est constante : $g(x) = k$, soit $y(x) = ke^{ax}$. □

C) Équation différentielle $y' = ay + b$

Propriété 5

Les solutions de $y' = ay + b$ $(a, b \neq 0)$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $k \in \mathbf{R}$.

Démonstration. La solution constante particulière vérifie $0 = ak + b$, soit $k = -\dfrac{b}{a}$. Si g est une solution quelconque et $f(x) = -\dfrac{b}{a}$, alors $h = g - f$ vérifie $h' = ah$, donc $h(x) = ke^{ax}$, d'où $g(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$. □

D) Équation différentielle $y' = ay + \varphi$

Propriété 6

Si g est une solution particulière de $y' = ay + \varphi$, les solutions générales sont $x \mapsto ke^{ax} + g(x)$, $k \in \mathbf{R}$.