Propriété 7

Dans un repère orthonormé, le plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec} \quad d = -(ax_A + by_A + cz_A).$$

D) Projection orthogonale et distances

Définition 7

*Le **projeté orthogonal** d'un point A sur une droite (ou un plan) est le pied de la perpendiculaire menée de A à cette droite (ou ce plan).*

Définition 8

*La **distance** d'un point A à un plan $\mathcal{P}$ est la plus petite longueur AM pour $M \in \mathcal{P}$.*

Propriété 8

Si H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ et B un point de $\mathcal{P}$, alors $d(A, \mathcal{P}) = AH$ et :

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}.$$

Propriété 9

Si H est le projeté orthogonal de A sur la droite (d) de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et B un point de (d), alors $d(A, d) = AH$ et :

$$AH = \left\| \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u} \right\|.$$

Chapitre 8

Loi binomiale

Capacités exigibles — Programme officiel (BO)

- Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques ; représenter la situation par un arbre ; calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.
- Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale.
- Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès.
- Calculer numériquement $P(X = k)$, $P(X \leq k)$, $P(k \leq X \leq k')$; chercher un intervalle I tel que $P(X \in I) < \alpha$ ou $P(X \in I) > 1 - \alpha$.

Démonstrations exigibles — Programme officiel (BO)

- Expression de la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli.

Exemples dálgorithme — Programme officiel (BO)

- Simulation de la planche de Galton.
- Problème de la surréservation : détermination du plus petit entier k tel que $P(X > k) \leq \alpha$, pour $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ et $\alpha > 0$.
- Simulation d'un échantillon d'une variable aléatoire.

A) Dénombrement

1) Principe additif

Définition 1

*Deux ensembles A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.*

Définition 2

*Un ensemble E à n éléments est dit **fini** de **cardinal** n, noté $\mathrm{Card}(E) = n$.*

Propriété 1

Si $A_1, \ldots, A_p$ sont des ensembles deux à deux disjoints :

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup \cdots \cup A_p) = \mathrm{Card}(A_1) + \cdots + \mathrm{Card}(A_p).$$

2) Principe multiplicatif

Définition 3

*Un p-**uplet** de $E_1 \times \cdots \times E_p$ est une liste ordonnée $(x_1; \ldots; x_p)$ avec $x_i \in E_i$. Un 2-uplet est un couple, un 3-uplet un triplet.*

Propriété 2

$\mathrm{Card}(E_1 \times \cdots \times E_p) = \mathrm{Card}(E_1) \times \cdots \times \mathrm{Card}(E_p)$.

B) Arrangements et permutations

Définition 4

On appelle ***factorielle*** *de n : $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$. Par convention $0! = 1$.*

Définition 5

Un ***arrangement*** *de k éléments d'un ensemble A à n éléments est un k-uplet d'éléments* distincts *de A.*

Propriété 3

Le nombre d'arrangements de k éléments parmi n est :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Définition 6

Une ***permutation*** *d'un ensemble E à n éléments est un n-uplet d'éléments distincts de E.*

Propriété 4

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

C) Combinaisons

Propriété 5

Le nombre de parties d'un ensemble fini à n éléments est 2^n.

Démonstration. Chaque élément peut être inclus (1) ou exclu (0) d'une partie donnée. Il y a donc 2^n choix, correspondant aux 2^n suites binaires de longueur n. □

1) Nombre de combinaisons

Définition 7

Une ***combinaison*** *de k éléments de E est une partie de E à k éléments. Le nombre de telles combinaisons est noté $\binom{n}{k}$.*

Propriété 6

Pour $k \leq n$:

1. $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ et $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. ***Relation de Pascal :*** *si $1 \leq k \leq n-1$,* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
3. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.